Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Christoph Brackenhofer

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2022/2023

Algebra und Zahlentheorie
Blatt 5
Abgabe: 29.11.2022, 14 Uhr
Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.**

(a) Sei g ein Element der Gruppe G. Zeige, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} F_g: & G & \to & G \\ & h & \mapsto & h^g \end{array}$$

ein Gruppenepimorphismus ist. Beschreibe den Kern von F_g.

(b) Sei A eine Teilmenge von G, die invariant unter Konjugation ist, d. h. für alle a aus A und g aus G liegt das Element a^g in A. Betrachte nun die von A erzeugte Untergruppe $H = \langle A \rangle$ von G. Zeige mit Hilfe der Teilaufgabe (a), dass H ein Normalteiler von G ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.**

(a) Sei p eine Primzahl und G eine nicht-triviale endliche p-Gruppe mit $|G| = p^n$ für eine natürliche Zahl n. Zeige, dass das Zentrum $Z(G)$ ein Element der Ordnung p enthält.

(b) Sei G eine Gruppe derart, dass die Quotientengruppe $G/Z(G)$ zyklisch ist. Zeige, dass G abelsch ist.

(c) Schließe daraus, dass jede endliche Gruppe der Mächtigkeit p^2 abelsch ist.

Sei nun G eine endliche Gruppe der Mächtigkeit 20449.

d) Zeige, dass jede Sylow-Untergruppe von G ein Normalteiler ist.

e) Schließe aus (b) und aus der Aufgabe 4 auf Blatt 3, dass G abelsch sein muss.

HINWEIS: Inneres direktes ...

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.**

Sei I ein Ideal des Ringes R der 2×2-Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{Z}$.

(a) Zeige, dass die Menge aller Einträge an der Stelle $(1, 1)$ von Elementen aus I ein Ideal J des Rings $\mathbb{Z}$ bilden.

(b) Schliesse mit Hilfe elementarer Matrixoperationen, dass I die Menge aller 2×2-Matrizen mit Einträgen aus J ist.

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter im Fach im Keller des mathematischen Instituts.